数理解析研究所講究録
346巻 1979年 80-87

Higher Separating of Links

広大・理　大川哲介

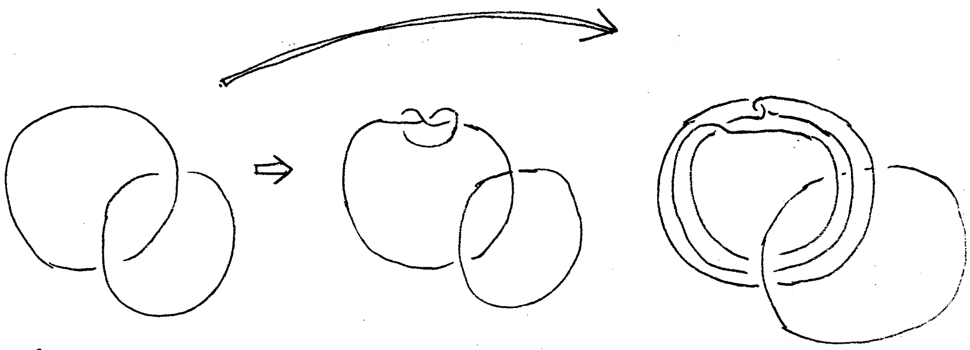
目的：　knot については，ある程度分ったものとし，その上に相対的な，link の不変量・性質・同値関係等を，調べる．最も基本的な不変量は，linking number であり，その拡張として，Milnor $\bar{\mu}$－invariant が定義されている。

ここでは，PL－isotopy，FI－isotopy，n－separability 等について考える．主に群論的方法で不変量が定義されるので，コボルディズムとの関連は，はっきりせず，これからの問題と云える。

諸定義：　全て，S^3内の tame な link を考える．本論では向きは考えない．但し各成分には1からμまで（μは成分の数）番号がついているものとし，$L=\cup_{i=1}^{\mu} L_i$ の如く書表わす．（注：isotopyと云う以上は当然向きを考えているが，ここで考える invariant は，向きによらぬと云う意味である）

$L=\cup_{i=1}^{\mu} L_i$，$L'=\cup_{i=1}^{\mu} L'_i$ を μ－component link とする．Lの一つの成分上に局所的な knot を付加え

て，L'が得られるとき，L'はLに elementary PL-isotopic であると云い，その関係から得られた同値関係を PL-isotopic と云う．Lの1つの成分L_iの正則近傍をN（$N \cap L_j = \phi$ $(i \neq j)$）とし，$L'_j = L_j$ $(j \neq i)$，$L'_i \subset \mathrm{Int}\, N$，かつ$L'_i$の$N$に於ける winding number は1であるとき，L'はLに elementary F-isotopic であると云い，これにより生成された同値関係を F-isotopic と云う．F-isotopic は，PL-isotopic を含む．



elementary PL-isotopy　　　elementary F-isotopy

Lが$(s_1, s_2, \cdots s_\mu)$-separable であるとは，次の条件を満たす多面体列K_{ij}が存在することを云う．　$(s_i \geq 0)$

① $K_{ij} \subset S^3$ 　$(i = 1, \cdots \mu,\ j = 0, 1, \cdots s_i)$

② $L_i = K_{i0} \subset K_{i1} \subset \cdots \subset K_{is_i}$

③ $K_{is_i} \cap K_{js_j} = \phi$ 　$(i \neq j)$

④ $K_{i,p} \subset K_{i,p+1}$ から導びかれる準同形 $H_1(K_{i,p}; \mathbb{Z}) \to H_1(K_{i,p+1}; \mathbb{Z})$ が零写像

$(i=1,\cdots \mu,\ p=0,1,\cdots\ s_i-1)$

$(S,S,\cdots S)$-separable を，単に S-separable と云う. $\mu=2$, $p+q=p'+q'$ のとき，$(p,q,p',q'\geqq 0)$, (p,q)-separability と (p',q')-separability は同値であることがすぐ分る.

次に，群系なる概念を導入する. 群 G と，$m_i, l_i \in G$ $(i=1,2,\cdots \mu)$ の組 $\mathcal{G}=(G, m_1, l_1, \cdots\cdots m_\mu, l_\mu)$ を，群系と呼ぶ. $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'=(G', m_1', l_1', \cdots\cdots m_\mu', l_\mu')$ が同値であるとは，$\exists \varphi: G\to G'$：同型写像，$\exists a_1, \cdots \exists a_\mu \in G'$, $\varphi(m_i)=a_i^{-1} m_i' a_i$, $\varphi(l_i)=a_i^{-1} l_i a_i$ となることを云う. 群 G の降中心列を $\Gamma_1 G=G$, $\Gamma_{n+1} G=[\Gamma_n G, G]$ で定める. さらに

$\mathcal{C}\ell X$: X で生成された部分群

$N\mathcal{C}\ell X$: X で生成された正規部分群

$$A \sqcap B = \mathcal{C}\ell\{b^{-1}ab \mid a\in A,\ b\in B\}$$

$$A_{pq}\mathcal{G} = N\mathcal{C}\ell \cup_{i=1}^{\mu} \Gamma_q(\{m_i\} \sqcap \Gamma_p N\mathcal{C}\ell\{m_i\})$$

$$B_{pq}\mathcal{G} = N\mathcal{C}\ell \cup_{i=1}^{\mu} \Gamma_q(\{m_i, l_i\} \sqcap \Gamma_p N\mathcal{C}\ell\{m_i, l_i\})$$

$$\widetilde{A}_{pq}\mathcal{G} = G / A_{pq}\mathcal{G}$$

$$\widetilde{B}_{pq}\mathcal{G} = G / B_{pq}\mathcal{G}$$

$\mathcal{G}=\{G, m, l\}$ に対し $C_0\mathcal{G}=G$,

$$C_{n+1}\mathcal{G} = [C_n\mathcal{G}, C_n\mathcal{G}]\cdot(\{m\} \sqcap C_n\mathcal{G})$$

一般の $\mathcal{G}$ に対して

$$C_n\mathcal{G} = \mathrm{Cl}\ \cup_{i=1}^{\mu}\ C_n(G, m_i, l_i)$$

$$\tilde{C}_n\mathcal{G} = G / C_n\mathcal{G} \qquad \cdots \text{と定義する.}$$

link $L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$ が与えられたとき，それに対する群系 $\mathcal{G} = (G, m_1, l_1; m_2, l_2; \cdots; m_\mu\ l_\mu)$，を，$G = \pi_1(S^3 - L)$，$m_i, l_i$ は各々，L_i の meridian, longitude，$(m_i, l_i) = 1$ $(i = 1, \cdots \mu)$ として与える．この様な与え方は，変換 $m_i \to m_i^{\pm 1}$，$l_i \to l_i^{\pm 1}$，及び群系の同値を除いて一意に定まる．初めに L を S^3 内の link に限ったが，以後，断わらぬ限り，$L \subset M^3$ (M^3 : connected 3-mfd) として考える．このとき，l_i のとり方として，L_i が M^3 で homologous to 0 のときは l_i も，$M^3 - L_i$ で homologous to 0 のものを取り，そうでない場合は，単なる longitude を勝手に取る．最初に述べた，PL-isotopy 等の概念は，一般の M^3 内でも，同様に定義出来る．

諸定理：

定理 1. L, L' を，M^3 内の link (with μ-components)，それらに対する群系を，$\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ とせよ．そのとき

i) L と L' が PL-isotopic ならば

$$\tilde{A}_{pq}\mathcal{G} \approx \tilde{A}_{pq}\mathcal{G}' \qquad (p, q \geqq 1)$$

ii) L と L' が，F-isotopic ならば，

$$\widetilde{B}_{pq}\mathcal{G} \approx \widetilde{B}_{pq}\mathcal{G}' \quad (p, q \geqq 1)$$

（但し $\approx$ は群の同型を意味する）

定理 2. LをM^3内のlinkで，Lはs－separableであるとする．Lの群系を$\mathcal{G}=(G, m_1, l_1, \cdots m_\mu, l_\mu)$とするとき，$l_i \in C_s\mathcal{G}$ $(i=1, \cdots \mu)$

系. LをS^3内の2－component link，$\mathcal{G}=(G, m_1, l_1; m_2, l_2)$をその群系，$\mathcal{G}'=(G, m_1, l_1)$とする．$L$が$(s, 0)$－separableならば$l_1 \in C_s\mathcal{G}'$

定理1の系. LをS^3内のlinkとする．$G=\pi_1(S^3-L)$とするとき $G/\Gamma_p G$ $(p=1, 2, \cdots)$ は LのF－isotopy－invariantである．

注意：これはGiffenの結果（F－isotopy ⇒ topological cobordant）Stallingsの結果（$G/\Gamma_p G$ はtopological cobordism invariant）を使っても得られる．しかし，我々の結果は$p=\infty$ （但し $\Gamma_\infty G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_p G$）でも成立する．定理1も $1 \leqq p, q \leqq \infty$として成立する．証明は，以下に述べる有限の場合と全く同様である．

定理 3. LをM^3内のlinkで，M：compactとする．さらにHを有限群とするとき，$\widetilde{A}_{pq}\mathcal{G}$，$\widetilde{B}_{pq}\mathcal{G}$，$\widetilde{C}_p\mathcal{G}$から$H$への準同形の総数，全写準同型の総数等は計算可能である．但し$\mathcal{G}$は，link Lの群系．

固定された群Hへの準同型の総数等は明らかに群の不変量であるから，これを経由し，*link* のPL(F)－isotopy invariantとなり，またS－separableでないことを判定出来る計算可能不変量となっている．ここでは有限群を値域に考えたが，有限次元線型群を考えると，準同型全体は，定義域が有限生成なら，有限次元 affine variety となり，その座標環も計算可能となるから，より能率的な不変量を得ることが出来る．以下，定理1の略証を与えることにする

定理1の略証

①$A_{p,g}$ $\mathcal{G}$ 等の構成法より，$\mu = 1$，即ち *knot* の場合に証明すれば，十分である。

②さらに elementary PL(F)－isotopyの場合に限って良い．

③L'をLに elementary PL(F)－isotopic な *knot* とする．$G = \pi_1(M^3 - L)$，$G' = \pi_1(M^3 - L')$，N：Lの閉正則近傍，$L' \subset \mathrm{Int}\, N$とする．すると，図式

$$M^3 - \mathrm{Int}\, N \supset \partial N \subset N - L'$$

より，

$$G' = \text{push out} \left\{ \begin{array}{ccc} G & & \pi_1(N - L') \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \mathbb{Z}^2 & \end{array} \right\} \quad (1)$$

が得られる．さらにPL－isotopyの場合は，N_1：Lのある1点の十分小さな正則近傍で，$N_1 \cap L \approx I$かつ これは，

N_1の中で knot していないとし，$L-N_1=L'-N_1$とする．

すると，$\pi_1(M-L)=\pi_1(M-(L\cup N_1))=G$となる．図式

$$M-L-\mathrm{Int}\,N_1 \supset \partial N_1-L \subset N_1-L'$$

より，

$$G'=\text{push out}\left(G \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(N_1-L')\right) \quad (2)$$

が成立する．(1), (2)に於ける$\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$は$\{m, l\}$，$\{m\}$によって生成されたGの部分群とも見られる．但し $\mathcal{G}=\{G, m, l\}$ をLの群系とする．これらの図式に操作$\widetilde{A}_{pq}$，$\widetilde{B}_{pq}$を施して，自然射$G\to G'$がこれらの群の同型を惹起することを云えば良い．図式①，②の push out 図式に現れる射を次の如く名付ける．

$$(1)\quad \begin{tikzcd} & G' & \\ G \arrow[ur, "\gamma_1"] & & \pi_1(N-L') \arrow[ul, "\delta_1"'] \\ & \mathbb{Z}^2 \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\beta_1"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)\quad \begin{tikzcd} & G' & \\ G \arrow[ur, "\gamma_2"] & & \pi_1(N_1-L') \arrow[ul, "\delta_2"'] \\ & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\alpha_2"] \arrow[ur, "\beta_2"'] & \end{tikzcd}$$

④ β_1，β_2は，Abel 化群の同型を引起こす．

⑤ これより，$\Gamma_2\,\pi_1(N_1-L')=\Gamma_3\,\pi_1(N_1-L')=\Gamma_4 \cdots\cdots$

及び，$\Gamma_2\,\pi_1(N-L')=\Gamma_3\,\pi_1(N-L')=\Gamma_4 \cdots\cdots$

が従う．

⑥ さらに，

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \sqcap \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \sqcap \pi_1(N_1-L')$$

⑦これらと⑤を合わせて

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \sqcap \Gamma_p\ \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \sqcap \Gamma_p\ \pi_1(N_1-L')$$

⑧さらに

$$\widetilde{A}_{pq}\{\pi_1(N_1-L');\ m,\ l\} \approx \mathbb{Z}$$

$$\widetilde{B}_{pq}\{\pi_1(N-L');\ m,\ l\} \approx \mathbb{Z}^2$$

と合わせて求める結果を得る.

定理2，3の証明は略するが，定理2の証明は本質的に同じ考えで出来る．幾何学的には，$\{m\}\sqcap\cdots\cdots$を取っているところからも分る様に，meridean 以外の部分をほぐす covering を操り返し使って link の成分を分離するところにある．定理1では，2回しかくり返していないが，多重に操り返すことにより，$\widetilde{A}_{p_1 p_2 \cdots p_n}G$，$\widetilde{B}_{p_1 p_2 \cdots p_n}G$ なる不変量を得ることが出来る．